Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ

Методические указания
к выполнению практических работ
для студентов направления
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»

очной и заочной форм обучения

Энгельс 2024

ВВЕДЕНИЕ

Цель овладения аппаратом построения частотных характеристик систем управления состоит в создании теоретической базы для освоения математического аппарата исследования линейных систем автоматического управления (САУ), основных элементов и характеристик САУ, а также методов анализа САУ на устойчивость и качество управления, способов корректировки свойств линейных САУ.

ПОНЯТИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Если подать на вход системы с передаточной функцией **W(p)** гармонический сигнал

$$u(t)=U_m e^{j\omega t}=U_m(\cos\omega t+j\cdot\sin\omega t),$$

то после завершения переходного процесса на выходе установятся гармонические колебания

$$y(t)=Y_m e^{j(\omega t+\varphi)}=Y_m e^{j\omega t}e^{j\varphi}$$

с той же частотой, но иными амплитудой и фазой, зависящими от частоты возмущающего воздействия. По ним можно судить о динамических свойствах системы. Зависимости, связывающие амплитуду и фазу выходного сигнала с частотой входного сигнала, называются *частотными характеристиками* (ЧХ). Анализ ЧХ системы с целью исследования ее динамических свойств называется *частотным анализом*.

Подставим выражения для **u(t)** и **y(t)** в уравнение динамики

$$(a_0p^n + a_1pn - 1 + a_2p^{n-2} + ... + a_n)y = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_m)u.$$

Учтем, что

$$pu=pU_m e^{j\omega t}=U_m j\omega e^{j\omega t}=j\omega u,$$

а, значит,

$$pnu = pnU_m ejwt = U_m (jw)nejwt = (jw)nu.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для левой части уравнения. Получим:

$$p^n u=p^n U_m e^{j\omega t}=U_m (j\omega)^n e^{j\omega t}=(j\omega)^n u.$$

По аналогии с передаточной функцией можно записать:

$$y = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + ... + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a_n} u = W(j\omega)\cdot u$$

$W(j\omega)$, равная отношению выходного сигнала к входному при изменении входного сигнала по гармоническому закону, называется *частотной передаточной функцией*. Легко заметить, что она может быть получена путем простой замены p на $j\omega$ в выражении W(p).

W(jω) есть комплексная функция, поэтому

$$W(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=P(\omega)+jQ(\omega),$$

где P(ω) – *вещественная ЧХ (ВЧХ)*; Q(ω) – *мнимая ЧХ (МЧХ)*; A(ω) – *амплитудная ЧХ (АЧХ)*. Имея комплексную функцию, можно определить $\varphi(\omega)$ – *фазовую ЧХ (ФЧХ)*. АЧХ дает отношение амплитуд выходного и входного сигналов, ФЧХ – сдвиг по фазе выходной величины относительно входной:

$$A(\omega)=\frac{U_m}{Y_m}=\sqrt{P(\omega)^2+Q(\omega)^2}\ ;$$

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Если W(jω) изобразить вектором на комплексной плоскости, то при изменении ω от 0 до + ∞ его конец будет вычерчивать кривую, называемую *годографом вектора* W(jω), или *амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)* (рис.1).

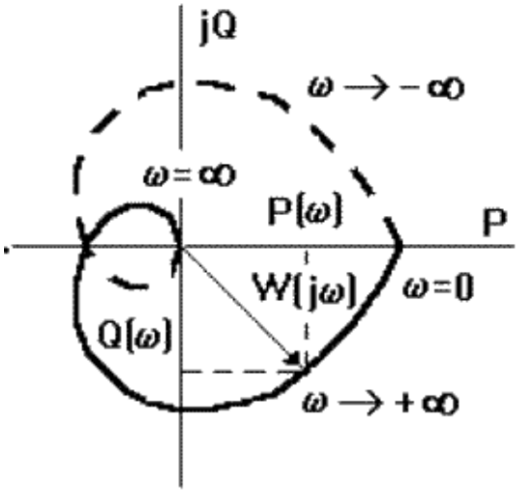

Рис.1. График амплитудно-фазовой частотной характеристики

Ветвь АФЧХ при изменении ω от - ∞ до 0 можно получить зеркальным отображением данной кривой относительно вещественной оси.

В теории автоматического управления (ТАУ) широко используются *логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)* (рис. 2): *логарифмическая амплитудная ЧХ (ЛАЧХ)* L(ω) и *логарифмическая фазовая ЧХ (ЛФЧХ)* $\varphi(\omega)$. Они получаются путем логарифмирования передаточной функции:

$$\ln[W(j\omega)]=\ln[A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}]=\ln[A(\omega)]+\ln[e^{j\varphi(\omega)}]=\ln[A(\omega)]+\varphi(\omega).$$

ЛАЧХ получают из первого слагаемого, которое из соображений масштабирования умножается на 20, и используют не натуральный логарифм, а десятичный, то есть $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$. Величина $L(\omega)$ откладывается по оси ординат в *децибелах*. Изменение уровня сигнала на 10 дб соответствует изменению его мощности в 10 раз. Так как мощность гармонического сигнала P пропорциональна квадрату его амплитуды A, то

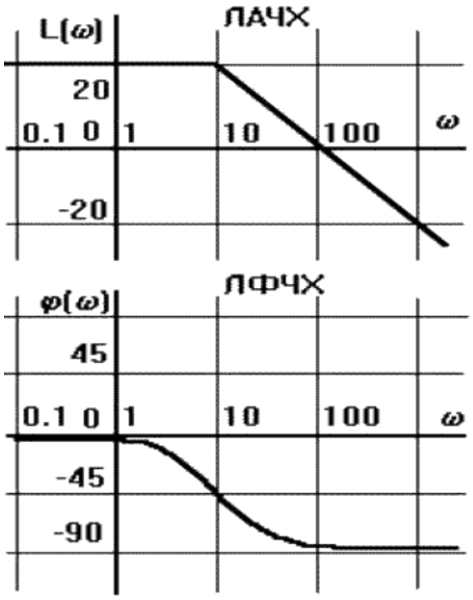

Рис. 2. Логарифмические частотные характеристики

изменению сигнала в 10 раз соответствует изменение его уровня на 20 дб, так как

$$\lg(P_2/P_1) = \lg(A_2^2/A_1^2) = 20\lg(A_2/A_1).$$

По оси абсцисс откладывается частота w в логарифмическом масштабе. То есть единичным промежуткам по оси абсцисс соответствует изменение w в 10 раз. Такой интервал называется *декадой*. Так как $\lg(0) = -\infty$, то ось ординат проводят произвольно.

ЛФЧХ, получаемая из второго слагаемого, отличается от ФЧХ только масштабом по оси ω. Величина $\varphi(\omega)$ откладывается по оси ординат в градусах или радианах. Для элементарных звеньев она не выходит за пределы: $-\pi \le \varphi \le +\pi$.

ЧХ являются исчерпывающими характеристиками системы. Зная ЧХ системы, можно восстановить ее передаточную функцию и определить параметры.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Зная передаточную функцию звена W(p), легко получить все его частотные характеристики. Для этого необходимо подставить в

передаточную функцию $j\omega$ вместо p, получим АФЧХ $W(j\omega)$. Затем надо выразить из нее ВЧХ $P(\omega)$ и МЧХ ($Q(\omega)$. После этого преобразуем АФЧХ в показательную форму и получаем АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$, а затем определяем выражение ЛАЧХ $L(w) = 20\lg A(\omega)$ (ЛФЧХ отличается от ФЧХ только масштабом оси абсцисс).

Безынерционное звено

Передаточная функция: $W(p) = k$.
АФЧХ: $W(j\omega) = k$.
ВЧХ: $P(\omega) = k$.
МЧХ: $Q(\omega) = 0$.
АЧХ: $A(\omega) = k$.
ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$.
ЛАЧХ: $L(\omega) = 20\lg k$.

Некоторые ЧХ показаны на рис. 3. Звено пропускает все частоты одинаково с увеличением амплитуды в k раз и без сдвига по фазе.

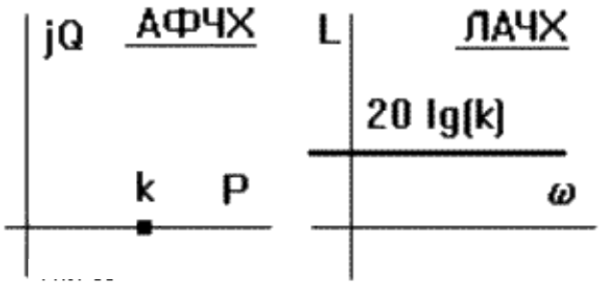

Рис. 3. Характеристики безынерционного звена

Интегрирующее звено

Передаточная функция: $W(p) = k/p$.
Рассмотрим частный случай, когда $k = 1$, то есть
$W(p) = 1/p$.
АФЧХ: $W(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{\frac{-j\pi}{2}}$.
ВЧХ: $P(\omega) = 0$.
МЧХ: $Q(\omega) = -1/\omega$.
АЧХ: $A(\omega) = 1/\omega$.
ФЧХ: $\varphi(\omega) = -\pi/2$.
ЛАЧХ: $L(\omega) = 20\lg(1/\omega) = -20\lg(\omega)$.
ЧХ показаны на рис. 4.

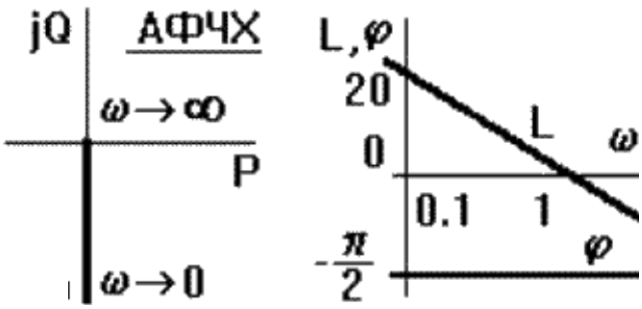

Рис.4. Характеристики интегрирующего звена

Все частоты звено пропускает с запаздыванием по фазе на 90°. Амплитуда выходного сигнала увеличивается при уменьшении частоты и уменьшается до нуля при росте частоты (звено «заваливает» высокие частоты). ЛАЧХ представляет собой прямую, проходящую через точку L(ω) = 0 при ω= 1. При увеличении частоты на декаду ордината уменьшается на 20lg10 = 20дб, то есть наклон ЛАЧХ равен -20 дб/дек (децибел на декаду).

Апериодическое звено

При k = 1 получаем следующие выражения ЧХ:

$$W(p) = \frac{1}{Tp+1};$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2};$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2};$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\operatorname{arctg}(\omega T);$$

$$A(\omega) = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}};$$

$$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = -10\lg(1 + (\omega T)2).$$

Здесь A_1 и A_2 – амплитуды числителя и знаменателя ЛФЧХ; φ_1 и φ_2 – аргументы числителя и знаменателя. ЛФЧХ, АФЧХ показаны на рис. 5.

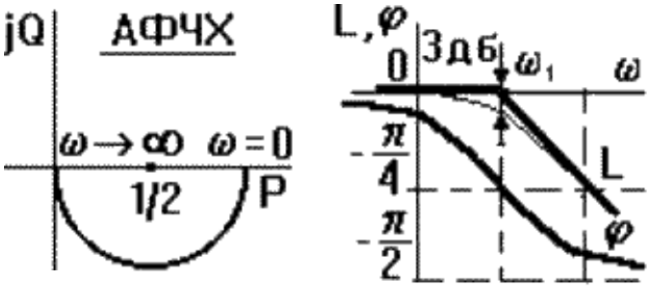

Рис. 5. Характеристики апериодического звена

АФЧХ есть полуокружность радиусом 1/2 с центром в точке P = 1/2. При построении асимптотической ЛАЧХ считают, что при $\omega < \omega_1 = 1/T$ можно пренебречь $(\omega T)^2$ в выражении для $L(\omega)$, то есть $L(\omega) \approx 10\lg 1 = 0$. При $\omega > \omega_1$ пренебрегают единицей в выражении в скобках и считают $L(w) \approx -20\lg(\omega T)$. Поэтому ЛАЧХ проходит вдоль оси абсцисс до сопрягающей частоты, затем под наклоном -20 дб/дек. Частота ω_1 называется сопрягающей частотой. Максимальное отличие реальных ЛАЧХ от асимптотических не превышает 3 дб при $\omega = \omega_1$.

ЛФЧХ асимптотически стремится к нулю при уменьшении ω до нуля (чем меньше частота, тем меньше искажения сигнала по фазе) и к $-\pi/2$ при возрастании ω до бесконечности. Перегиб в точке $\omega = \omega_1$ при $\varphi(\omega) = -\pi/4$. ЛФЧХ всех апериодических звеньев имеют одинаковую форму и могут быть построены по типовой кривой с параллельным сдвигом вдоль оси частот.

Инерционные звенья второго порядка

При k = 1 передаточная функция звена: $W(p) = \dfrac{1}{T^2 p^2 + 2\rho T p + 1}$.

Ввиду сложности вывода выражений для частотных характеристик рассмотрим их без доказательства, они показаны на рис. 6.

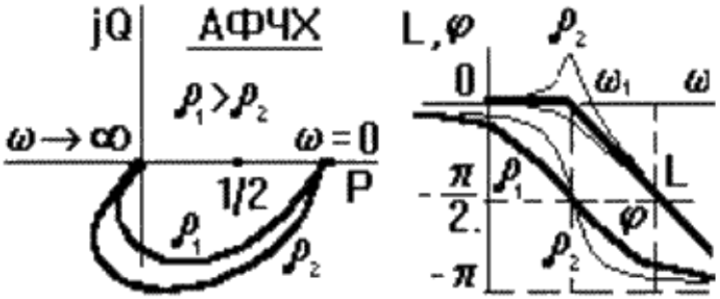

Рис.6. Характеристики инерционного звена второго порядка

Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена до сопрягающей частоты $\omega_1 = 1/T_1$ совпадает с осью абсцисс, при дальнейшем увеличении частоты идет с наклоном -40 дб/дек. То есть высокие частоты колебательное звено «заваливает» сильнее, чем апериодическое звено.

Реальная ЛАЧХ при $\omega \approx \omega_1$ значительно отличается от асимптотической. Это отличие тем существенней, чем меньше коэффициент демпфирования ρ. Точную кривую можно построить, воспользовавшись кривыми отклонений, которые приводятся в справочниках. В предельном случае $\rho = 0$ получаем консервативное звено, у которого при $\omega \approx \omega_1$ амплитуда выходных колебаний стремится к бесконечности (рис. 7).

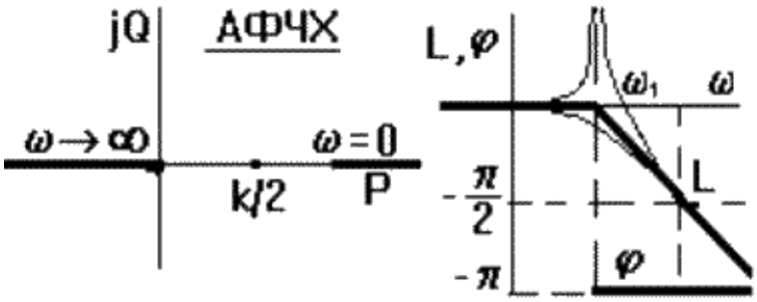

Рис. 7. Реальные характеристики инерционного звена второго порядка

ЛФЧХ при малых частотах асимптотически стремится к нулю. При увеличении частоты до бесконечности выходной сигнал поворачивается по фазе относительно входного на угол, стремящийся в пределе к -180°. ЛФЧХ можно построить с помощью шаблона, но для этого нужен набор шаблонов для разных коэффициентов демпфирования. При уменьшении коэффициента демпфирования АФЧХ приближается к оси абсцисс и в пределе у консервативного звена она вырождается в два луча по оси абсцисс, при этом фаза выходных колебаний скачком меняется от нуля до -180° при переходе через сопрягающую частоту (рис.7).

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ЧХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗВЕНЬЕВ

При построении ЧХ некоторых звеньев можно использовать «*правило зеркала*»: при k = 1 ЛАЧХ и ЛФЧХ звеньев с обратными передаточными функциями зеркальны относительно горизонтальной оси. Так, на рис. 8 изображены ЧХ идеального дифференцирующего и идеального форсирующего звеньев.

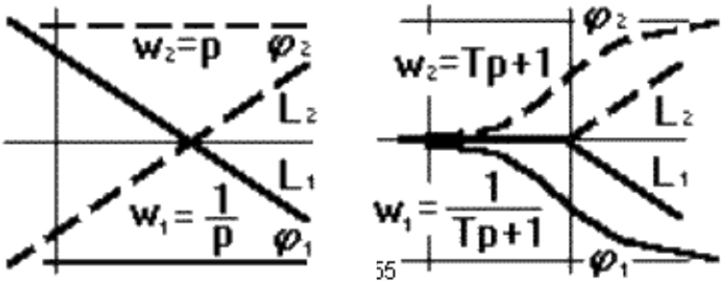

Рис. 8. ЧХ идеального дифференцирующего и идеального форсирующего звеньев.

Если $k \neq 1$, то передаточную функцию звена можно рассматривать как произведение kW_1, где W_1 – передаточная функция с $k = 1$. При этом амплитуда вектора АФЧХ $W(j\omega)$ при всех значениях φ должна быть увеличена в k раз, то есть $A(\omega) = kA_1(\omega)$. Поэтому, например, центр полуокружности АФЧХ апериодического звена будет находиться не в точке $P = 1/2$, а в точке $k/2$. ЛАЧХ также изменится: $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg kA_1(\omega) = 20\lg k + 20\lg A_1(\omega)$. Поэтому при $k \neq 1$ ЛАЧХ звена нужно поднять по оси ординат, не меняя ее формы, на $20\lg k$. На ЛФЧХ изменение k никак не отразится. Для примера на рис. 9 приведены частотные характеристики апериодического звена при $k = 10$ и $T = 1$с. При этом ЛАЧХ апериодического звена с $k = 1$ поднята вверх на $20\lg 10 = 20$.

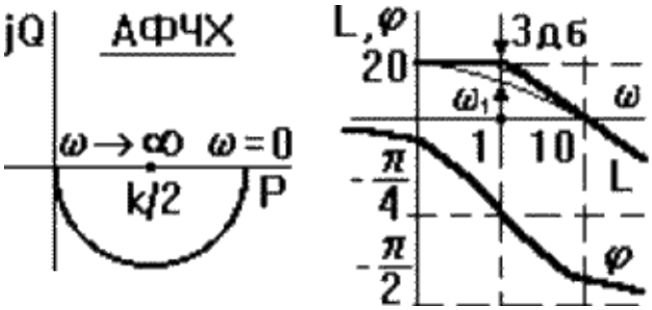

Рис.9. Частотные характеристики апериодического звена при $k = 10$ и $T = 1$с

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗОМКНУТЫХ ОДНОКОНТУРНЫХ САУ

При исследовании и проектировании САУ часто используют АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ *разомкнутых систем*. Это объясняется тем, что разомкнутые САУ более просто исследовать экспериментально, чем замкнутые. В то же время по ним можно получить исчерпывающую информацию о поведении данной САУ в замкнутом состоянии.

Любую многоконтурную САУ можно привести к одноконтурной. *Разомкнутая одноконтурная САУ* состоит из цепочки последовательно соединенных динамических звеньев. Зная передаточную функцию разомкнутой САУ, можно построить ее ЧХ. И наоборот, зная ЧХ разомкнутой САУ, снятую, например, опытным путем, можно найти ее передаточную функцию.

Передаточная функция разомкнутой одноконтурной системы равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$\mathbf{W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)}.$$

Заменив в этом выражении p на j w, получим ее АФЧХ:

$$\mathbf{W(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}}.$$

АЧХ: $\mathbf{A(\omega) = \prod_{i=1}^{n} A_i(\omega)}$,

Значит, ЛАЧХ равна сумме ЛАЧХ звеньев: $L(\omega) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\omega)$.

ЛФЧХ: $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\omega)$.

Таким образом, ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой САУ строят путем графического сложения ЛАЧХ и ЛФЧХ звеньев. При этом ограничиваются построением асимптотической ЛАЧХ.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ рекомендуется следующий порядок:

1) раскладывают сложную передаточную функцию на множители, являющиеся передаточными функциями типовых динамических звеньев (порядок полиномов числителя и знаменателя не выше второго);

2) вычисляют сопрягающие частоты отдельных звеньев и строят асимптотические ЛАЧХ и ЛФЧХ каждого элементарного звена;

3) путем графического суммирования ЛАЧХ и ЛФЧХ звеньев строят результирующие ЧХ.

Рассмотрим конкретный пример.

$$W(p) = \frac{100(p+1)}{p(0{,}1p+1)} = W_1 W_2 W_3 W_4.$$

Раскладываем данную передаточную функцию на передаточные функции элементарных звеньев:

1) безынерционное звено:

$\mathbf{W_1 = k_1 = 100 \Rightarrow L(w) = 20lg100 = 40;}$

2) форсирующее звено:

$\mathbf{W_2 = p + 1;}$

его параметры:

$\mathbf{k_2 = 1, T_2 = 1, \omega_2 = 1/T_2 = 1;}$

3) интегрирующее звено:

$\mathbf{W_3 = 1/p;}$

его ЛАЧХ проходит через точку **L = 0** при частоте ω**= 1;**

4) апериодическое звено:

$\mathbf{W_4 = 1/(0.1p + 1);}$

его параметры: k_4 **= 1,** $\mathbf{T_4 = 0.1}$**,** $\mathbf{\omega_4 = 1/T4 = 10.}$

Порядок построения ЛАЧХ и ЛФЧХ показан на рис.10.

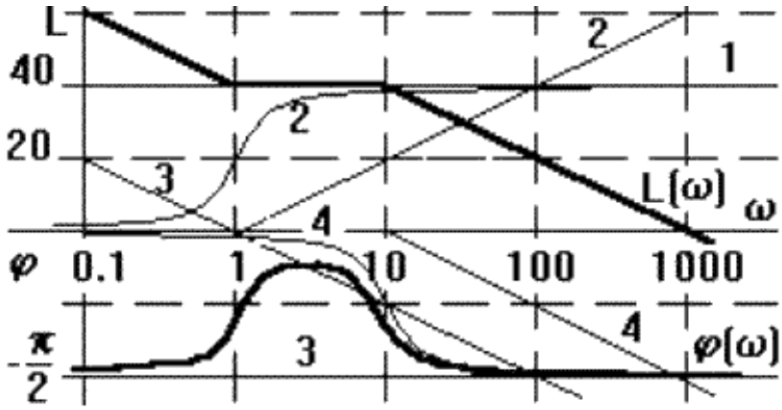

Рис.10. Порядок построения ЛАЧХ и ЛФЧХ

Иногда требуется решить обратную задачу, то есть определить передаточную функцию по известной ЛАЧХ. Процедура определения передаточной функции состоит из следующих этапов:

1) известная ЛАЧХ представляется в асимптотическом виде, для этого непрерывная кривая заменяется отрезками прямых либо горизонтальных, либо с наклоном, кратным ±20 дб/дек;

2) асимптотическая ЛАЧХ раскладывается на ЛАЧХ элементарных звеньев;

3) для каждой из полученных ЛАЧХ определяются **k** и ω_1 **= 1/T** и записывается передаточная функция типового звена;

4) передаточная функция САУ определяется путем перемножения передаточных функций типовых звеньев.

Описанный порядок иллюстрируется на рис. 11.

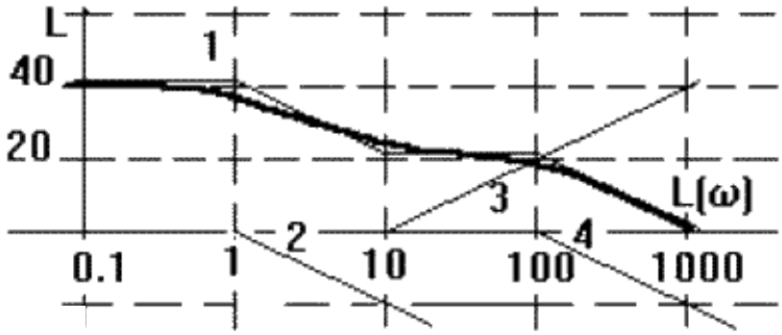

Рис 11. Определение передаточной функции по известной ЛАЧХ

Здесь ЛАЧХ может быть представлена суммой ЛАЧХ четырех типовых звеньев: пропорционального $\mathbf{W_1 = 100}$, апериодического $\mathbf{W_2 = 1/(p + 1)}$, форсирующего $\mathbf{W_3 = 0.1p + 1}$ и апериодического $\mathbf{W_4 = 1/(0.01p + 1)}$.

Таким образом, передаточная функция разомкнутой САУ имеет вид:

$$W(p) = \frac{100(0{,}1p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)}.$$

В более сложных случаях наклоны ЛАЧХ на некоторых участках превышают ± 20дб/дек. Тогда, помимо параметров **k** и **T,** приходится определять еще и коэффициенты демпфирования **r**.

Зная передаточную функцию разомкнутой САУ, можно построить ее уравнение динамики:

$$\mathbf{y(t) = W_p\, u(t) = \frac{100(0.1p + 1)}{(p + 1)(0.01p + 1)} u(t)} \quad =>$$

$$\mathbf{(p + 1)(0.01p + 1)y(t) = 100(0.1p + 1)u(t)} \quad =>$$

$$(0.01p^2 + 1.01p + 1)y(t) = (10p + 100)u(t) \Rightarrow$$

$$0.01\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 1.01\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 10\frac{du(t)}{dt} + 100u(t).$$

Таким образом, можно определить уравнение динамики реальных звеньев и всей реальной САУ, если теоретически это сделать затруднительно. Для снятия частотных характеристик реальной разомкнутой САУ на ее вход подают гармонический сигнал с изменяемой частотой и определяют изменение амплитуды и фазы выходного сигнала в зависимости от частоты. По полученным характеристикам определяют уравнение динамики, после чего САУ можно исследовать теоретически.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называют частотными характеристиками?
2. Как получить частотные характеристики опытным путем?
3. Как получить частотные характеристики теоретическим путем по известной передаточной функции звена?
4. Что такое АФЧХ? Как ее получить?
5. Что такое ВЧХ? Как ее получить?
6. Что такое МЧХ? Как ее получить?
7. Что такое АЧХ? Как ее получить?
8. Что такое ФЧХ? Как ее получить?
9. Что такое ЛАЧХ? Как ее получить?
10. Что такое ЛФЧХ? Как ее получить?
11. Как построить годограф АФЧХ?
12. Постройте АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ безынерционного звена.
13. Постройте АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ интегрирующего звена.
14. Постройте АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ апериодического звена.
15. Постройте АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена.
16. Постройте АФЧХ, ЛАЧХ и ЛФЧХ консервативного звена.
17. Постройте ЛАЧХ и ЛФЧХ идеального дифференцирующего звена.
18. Постройте ЛАЧХ и ЛФЧХ идеального форсирующего звена.
19. Как изменятся ЛАЧХ и ЛФЧХ звена, если коэффициент усиления возрастет в 100 раз?
20. Для чего служит правило зеркала?

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методическими указаниями по выполнению практической работы, получить задание у преподавателя.
2. Изучить материалы методических указаний и литературы.
3. Подготовить отчет.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

Отчет представляется каждым студентом в письменном виде и должен содержать следующие вопросы:

1) название работы;
2) цель работы;
3) исходные данные для расчетов и условия задачи по заданию преподавателя;
4) расчетную часть;
5) вывод по результатам работы.

На титульном листе отчета должны быть указаны номер группы и фамилия студента, представившего отчет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования / К. В. Егоров. – М.: Энергия. 1967. – 698 с.

2. Солодовников В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.

3. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем / Н.Н. Иващенко. – М.: Машиностроение, 1973. – 606 с.

4. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1969. – 588 с.

5. Васильев Д. В. Системы автоматического управления. Примеры расчета / Д. В. Васильев, В. Г. Чуич. – М.: Высшая школа, 1967. – 419 с.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ

Методические указания
к выполнению практических работ

Составил ТИХОНОВ Денис Александрович

Рецензент М. В. Стекольников